EJERCICIOS DE COLOQUIO DE FECHA 29-6-10

Ej. 1 – Hallar a y b tal que $\iint_D 4x^2 dx\, dy$ **donde** $D: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a>0, b>0$, **tome el máximo valor, si** $a^2+b^2=5$.

Sol: Usamos coordenadas polares generalizadas: $\begin{cases} x = a\rho\cos(\theta) \\ y = b\rho\, sen(\theta) \end{cases}$

el Jacobiano es $J = a\, b\, \rho$

$$\iint_D 4x^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^1 4\; a^2\rho^2\cos^2(\theta)\; a\; b\; \rho\; d\rho\; d\theta = 4a^3\, b\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^3\cos^2(\theta)\; d\rho\; d\theta =$$

$$4a^3\, b\int_0^{2\pi} \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^1 \cos^2(\theta)\; d\theta = a^3\, b\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\; d\theta = \frac{a^3\, b}{2}\left[\theta+\frac{sen(2\theta)}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi\; a^3\; b$$

La función a extremar es $\underline{f(a,b)=\pi\; a^3\; b}$ con la condición: $a^2+b^2=5$

Por Lagrange: $L(a,b,\lambda)=\pi\; a^3\; b\; +\; \lambda(\; a^2+b^2-5)$

Derivando respecto a las variables a,b,λ e igualando a cero (0) y resolviendo el sistema resulta

$a=\frac{\sqrt{5}}{2}$ $\quad y \quad$ $b=\frac{\sqrt{15}}{2}$

El ejercicio también se puede hacer parametrizando la curva:
$a^2+b^2=5 \;\;\rightarrow\;\; \overline{g}(t)=(\sqrt{5}\cos(t),\, \sqrt{5}sen(t))$ y calculando los extremos de la función

compuesta: $\underline{h(t)=\left(f\circ\overline{g}\right)(t)=\pi\left(\sqrt{5}\cos(t)\right)^3\left(\sqrt{5}sen(t)\right)}$

Ej.2- Demostrar que la Circulación del campo vectorial $\overline{f}(x,y)=(x\,e^{sh(x)}-\mu\, x\, y+y,\; 2x+\cos(y\,e^{y}))$ **, siendo** $\mu\in IR$**, a lo largo de la curva** ***C*** **solución de** $x\,dx+(y-1)\,dy=0$ **, que pasa por (0, 2) y orientada positivamente es independiente de** μ**.**

Sol: La curva solución *C*, se determina resolviendo la Ecuación Diferencial por Variables Separables, resultando la circunferencia con centro en (0, 1) y radio 1, cuya ecuación es: $x^2+(y-1)^2=1$. Aplicando Teorema de Green:

$$\oint_{C^+}\overline{f}\;.\;\overline{dl}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dx\;dy$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2 + \mu x - 1 = 1 + \mu\ x$$

Pasando a coordenadas polares: $\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = 1 + \rho\, sen(\theta) \end{cases}$ *con* $\begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \rho \le 1 \end{cases}$ y $|J| = \rho$

Circulación = $\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\ dx\ dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 + \mu\, \rho\cos(\theta))\, \rho\ d\rho\ d\theta = \pi$

Luego la circulación no depende de μ.